INF4100
Laboratoire no. 5

13/02/08

(Équations de récurrence et théorème général)

1. Analyse de l'algorithme récursif de tri fusion

Donnez les équations de récurrence pour le tri par fusion (Cahier de notes de cours, p. 33), en supposant qu'on veuille compter (ensemble) les opérations barométriques suivantes : les comparaisons «`inf == sup`» de la procédure `trierRec` ainsi que les comparaisons «`i1 <= mid & i2 <= sup`» de la procédure `fusionner` — on ne compte cette condition complexe que pour une unique «comparaison». Déterminez ensuite la solution exacte de ces équations de récurrence, puis la solution asymptotique.

2. Analyse de l'algorithme récursif pour la somme

Soit l'algorithme suivant :

```
procedure somme0ij( int i, int j ) returns int r
{
  r = i;
  for [k = i+1 to j] { r += k; }
}
procedure somme2Rec( int i, int j ) returns int r
{
  if ( j - i + 1 <= N ) {
    r = somme0ij( i, j );
  } else {
    int mid = (i + j) / 2;
    int r1 = somme2Rec( i,     mid );
    int r2 = somme2Rec( mid+1, j );
    r = r1 + r2;
  }
}

procedure somme2( int n ) returns int r
{ r = somme2Rec( 1, n ); }
```

a. Tracez l'arbre des appels, en supposant $n = 2^k$ et $N = 2^K$. Au total, combien d'appels à la procédure `somme0ij` seront effectués? Et quelle sera la profondeur de l'arbre?

b. Spécifiez les équations de récurrence décrivant *le nombre exact* de comparaisons effectuées par l'algorithme — on ne s'intéresse ici qu'à la comparaison «`j-i+1 <= N`».

   Trouvez la solution exacte de cette équation, puis la solution asymptotique.

c. Même question, mais cette fois en comptant *aussi* les comparaisons (implicites) effectuées dans `somme0ij` — une boucle `for` pour laquelle le corps s'exécute l fois génère $l + 1$ comparaisons, si on compte aussi la comparaison qui fait terminer la boucle.

Exercices tirés du cahier de notes de cours :

- Série 2 (p. 218–219) : Exercices traduits du manuel de Neapolitan & Naimipour (Chap. 2) : 15, 16, 38

Remarque pour 38 : N'essayez pas de trouver une solution exacte Θ : trouvez plutôt une borne inférieure Ω et une borne supérieure O (possiblement distinctes l'une de l'autre).

Exercices tirés du cahier de notes de cours :

- Série 3 (p. 221) : 3, 4, (si pas faits en classe) et 5

Exercices tirés du cahier de notes de cours :

- Série 3 (p. 221–222) : Exercices traduits du manuel de Neapolitan & Naimipour (Chap. B) : 24, 25

Remarque : Le théorème B.5 correspond simplement au théorème 5 présenté aux pages 120–121 du manuel. Quant au théorème B.6, il s'agit simplement de la version du même théorème qui s'applique pour n'importe quel n (et pas uniquement les n qui sont une puissance de b).