

## Exercices INF7440 : série #4

1. Soit un sac à dos pouvant contenir un poids maximal de 10 kilos. Soit les items de poids et bénéfices suivants :

Poids	2	5	4	3
Bénéfices	30	80	59	44

Quels items devraient être inclus dans le sac pour obtenir un bénéfice maximum sans dépasser le poids permis (10 kilos)?

2. Soit une série de villes  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . On désire se rendre, en train, de la ville  $v_1$  à la ville  $v_n$ , mais en s'arrêtant en chemin dans chacune des villes intermédiaires  $v_2, v_3, \dots$  (dans l'ordre). Le coût pour un billet de train allant de la ville  $v_i$  à la ville  $v_j$  (pour  $i < j$ ) est de  $c(i, j)$ . Un tel billet permet, sans frais supplémentaire, de s'arrêter dans les villes intermédiaires  $v_k$  (si elles existent, pour  $i < k < j$ ). Les prix des divers billets sont très variables. Par exemple, il est possible que pour se rendre de  $v_3$  à  $v_6$ , il soit moins coûteux d'acheter un billet pour aller de  $v_3$  à  $v_5$ , puis un autre billet pour aller de  $v_5$  à  $v_6$ .

Donnez des équations (récursives) permettant de décrire la solution à ce problème et concevez un algorithme (de programmation dynamique) permettant de trouver le coût minimal pour aller de la ville  $v_1$  à la ville  $v_n$  ( $n > 1$ ), où le coût pour un billet allant de  $v_i$  à  $v_j$  (pour  $i < j$ ) est  $c(i, j)$ . Quelle est la complexité de votre algorithme?

---

## Exercices tirés du manuel.

### Exercices du chapitre 3 (pp. 133–136)

- 12. Vous pouvez ne trouver que le coût de la solution optimale, sans trouver l'ordre exact lui-même.
  - 29.
  - 33. Note : La solution d'un problème résolu à l'aide de la programmation dynamique n'est pas toujours obtenue directement à partir d'une case spécifique du tableau. Il peut parfois être nécessaire d'effectuer certains traitements additionnels sur le tableau des sous-solutions.
-

**3.** La *distance d'édition* est souvent utilisée pour définir une mesure de similarité entre chaînes (de caractères, de symboles, de gènes, etc.). Différentes distances sur diverses formes de chaînes ont ainsi été introduites, par ex., traitement et analyse de textes, analyse de protéines et de génomes en bio-informatique, et même, tout récemment, correction de dictées musicales.

L'idée maîtresse derrière la distance d'édition est de déterminer le nombre *minimum* d'opérations (par ex., insertion, suppression, ou substitution) qui doivent être appliquées sur la première chaîne pour obtenir la deuxième. Un exemple, présenté à la Figure 1, montre comment le mot "surgery" est transformé en "surveys" à l'aide d'opérations de suppression, insertion ou substitution.

```
surgery
survery    -- Substitution de g par v
survey     -- Suppression de r
surveys    -- Insertion s
```

Figure 1: Transformation de "surgery" en "surveys"

Soit deux chaînes  $A$  et  $B$ . Dénotons par  $C(i, j)$  le coût minimal pour transformer la chaîne  $A[1..i]$  dans la chaîne  $B[1..j]$ , le coût étant défini par le nombre d'opérations pour passer de l'une à l'autre tel que décrit plus bas. Les équations suivantes donnent le coût pour passer de la chaîne  $A$  à la chaîne  $B$ , en supposant que les opérations possibles sont l'insertion, la suppression et la substitution.

$$\begin{aligned}
 C(0, 0) &= 0 \\
 C(i, 0) &= C(i - 1, 0) + \text{coût}_{sup}(A[i]) \\
 C(0, j) &= C(0, j - 1) + \text{coût}_{ins}(B[j]) \\
 C(i, j) &= \min \begin{cases} C(i - 1, j) + \text{coût}_{sup}(A[i]) \\ C(i, j - 1) + \text{coût}_{ins}(B[j]) \\ C(i - 1, j - 1) + \text{coût}_{subst}(A[i], B[j]) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Les coûts des diverses opérations sont définis comme suit (c'est-à-dire que chaque opération est de coût unitaire) :

Suppression	$\text{coût}_{sup}(c) = 1$
Insertion	$\text{coût}_{ins}(c) = 1$
Substitution	$\text{coût}_{subst}(c, d) = 1$ si $c \neq d$ , 0 si $c = d$

- En fonction des coûts indiqués, quelle serait alors la distance d'édition entre les mots "chien" et "chats"?
- Définissez les équations spécifiant la fonction  $C$  et permettant de déterminer la distance d'édition, mais cette fois dans le cas où *seules les opérations d'insertion et de suppression sont permises* (pas de substitution).
- Quelle serait alors la distance d'édition entre les mots "chien" et "chats"?
- Donnez un algorithme itératif efficace permettant de calculer la distance d'édition entre deux chaînes dans le cas où seules les opérations d'insertion et suppression sont permises. La procédure pour cet algorithme aurait l'interface suivante :

```
procedure distance( char ch1[*], int n1, char ch2[*], int n2 ) returns int dist
```

Quelle est la complexité de votre algorithme?