Exercices : solutions de la série #2

Exercices du chapitre 1

- 15.

  Pour $n \geq 1$, $n^3 \leq n^2 + 3n^3 \leq 3n^3 + 3n^3 = 6n^3$

  Donc $c = 1$, $d = 6$, $N = 1$

- 16.

  O : Pour $n \geq 1$, $6n^2 + 20n \leq n^3 + 6n^2 + 20n \leq n^3 + 6n^3 + 20n^3 = 27n^3$.

  Ω : il faut trouver N et c tel que $n \geq N$, $n^3 \leq c(6n^2 + 20n)$. Ceci est équivalent à $1 \leq \frac{6c}{n} + \frac{20c}{n^2}$ pour n suffisamment grand. Il suffit de prendre $n = \max\{N, 20c\}$ pour voir que cela est impossible.

- 18.

  Application répétitive des propriétés 6 et 7.

- 19.

- 20. Propriété 1 seulement.

  Supposons $g(n) \in O(f(n))$. Donc, il existe N et d tel que pour $n \geq N$, $g(n) \leq d\ f(n)$. Donc, pour $n \geq N$, $f(n) \geq \frac{1}{d}\ g(n)$. Donc, $c = \frac{1}{d}$.

- 26.

  Soit $n = 2^k$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k} \Theta(1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Theta(\lg\ n) \\
&\in \Theta(n\ \lg\ n)
\end{aligned}
$$

- 28.

  Sélectionnons l'opération de comparaison `j <= n` comme opération barométrique (si on suppose `n >= 1`, alors elle sera exécutée au moins aussi souvent, sinon plus souvent, que n'importe quelle autre instruction).

  Les différentes valeur de i dans la boucle extérieure seront les suivantes : $n, \frac{n}{2}, \frac{n}{4}, \frac{n}{8}, \ldots, 2, 1$. Au total,on aura donc besoin lg n itérations. Toutefois, le nombre d'itérations de la boucle interne dépend de la valeur de i.

  Donc, le nombre d'itérations de la boucle intérieure dépend du numéro de l'itération (de la valeur de i), chaque itération nécessitant une comparaison (opération barométrique) : plus précisément, à l'itération i, on exécutera lg i opérations barométriques.

En supposant $n = 2^k$, un estimé Θ pour le nombre total d'opérations barométriques sera donc déterminé par la sommation suivante :

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \lg\ n + \lg\ \frac{n}{2} + \lg\ \frac{n}{4} + \ldots + \lg\ \frac{n}{2^{k-1}} + \lg\ \frac{n}{2^k} \\
&= \lg\ \frac{2^k}{1} + \lg\ \frac{2^k}{2} + \lg\ \frac{2^k}{4} + \ldots + \lg\ \frac{2^k}{2^{k-1}} + \lg\ \frac{2^k}{2^k} \\
&= \lg\ 2^k + \lg\ 2^{k-1} + \lg\ 2^{k-2} + \ldots + \lg\ 2^1 + \lg\ 2^0 \\
&= k + k - 1 + k - 2 + \ldots + 1 + 0 \\
&= \sum_{i=0}^{\lg\ n} i \\
&= \frac{(\lg\ n + 1)(\lg\ n)}{2} \\
&\in \Theta((\lg\ n)^2)
\end{aligned}
$$

Exercices du chapitre 2

- 5.

  Devient une fouille séquentielle. Complexité $\Theta(n)$.

- 15. Le théorème général peut être utilisé. Pour (d), utilisez aussi $g(n) = n^2$ plutôt qu'une fonction vraiment générale.

  (a) * $T(n) = 5\ T(n/3) + g(n)$
      * $T(1) = \Theta(1)$

  (b) $\Theta(n^{log_3\ 5})$

  (c) Ne pas faire.

  (d) $\Theta(n^2)$

- 16.

  - $T(n) = 10\ T(n/3) + c\ n^2$
  - $T(1) = d$

  $\Theta(n^{log_3\ 10}) = \Theta(n^{2.x})$

- 38.

  - $T(n) = n\ T(n/3) + cn$
  - $T(1) = d$

  En procédant par substitution, et en supposant $n = 3^k$ on arrive aux équations suivantes :

$$
\begin{aligned}
T(n) &= nT(\frac{n}{3}) + cn \\
&= n[\frac{n}{3}T(\frac{n}{3^2}) + c\frac{n}{3}] + cn \\
&= \frac{n^2}{3}T(\frac{n}{3^2}) + c\frac{n^2}{3} + cn \\
&= \frac{n^2}{3}[\frac{n}{3^2}T(\frac{n}{3^3}) + c\frac{n}{3^2}] + c\frac{n^2}{3} + cn \\
&= \frac{n^3}{3^3}T(\frac{n}{3^3}) + c\frac{n^3}{3^3} + c\frac{n^2}{3} + cn \\
&= \frac{n^3}{3^3}[\frac{n}{3^3}T(\frac{n}{3^4}) + c\frac{n}{3^3}] + c\frac{n^3}{3^3} + c\frac{n^2}{3} + cn \\
&= \frac{n^4}{3^6}T(\frac{n}{3^4}) + c\frac{n^4}{3^6} + c\frac{n^3}{3^3} + c\frac{n^2}{3} + cn \\
&= \frac{n^4}{3^6}[\frac{n}{3^4}T(\frac{n}{3^5}) + c\frac{n}{3^4}] + c\frac{n^4}{3^6} + c\frac{n^3}{3^3} + c\frac{n^2}{3} + cn \\
&= \frac{n^5}{3^{10}}T(\frac{n}{3^5}) + c\frac{n^5}{3^{10}} + c\frac{n^4}{3^6} + c\frac{n^3}{3^3} + c\frac{n^2}{3} + cn \\
&= \frac{n^5}{3^{\frac{5(5-1)}{2}}}T(\frac{n}{3^5}) + c\sum_{i=1}^{5}\frac{n^i}{3^{\frac{i(i-1)}{2}}} \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n^k}{3^{\frac{k(k-1)}{2}}} T(\frac{n}{3^k}) + c \sum_{i=1}^{k} \frac{n^i}{3^{\frac{i(i-1)}{2}}} \\
&= \frac{n^k}{3^{\frac{k(k-1)}{2}}} T(1) + c \sum_{i=1}^{k} \frac{n^i}{3^{\frac{i(i-1)}{2}}} \\
&= \frac{n^k}{3^{\frac{k(k-1)}{2}}} d + c \sum_{i=1}^{k} \frac{n^i}{3^{\frac{i(i-1)}{2}}} \\
&= \frac{n^k}{(3^k)^{\frac{k-1}{2}}} d + c \sum_{i=1}^{k} \frac{n^i}{3^{\frac{i(i-1)}{2}}} \\
&= \frac{n^k}{n^{\frac{k-1}{2}}} d + c \sum_{i=1}^{k} \frac{n^i}{3^{\frac{i(i-1)}{2}}} \\
&= n^{\frac{k+1}{2}} d + c \sum_{i=1}^{k} \frac{n^i}{3^{\frac{i(i-1)}{2}}} \\
&> n^{\frac{k}{2}} d \\
&\in \Omega(\sqrt{n^{log_3\ n}})
\end{aligned}
$$