

Exercices : solutions de la série #3

Solution à l'exercice 1.

a. L'équation de récurrence devient la suivante :

- $T(n) = T(1) + T(n-1) + \Theta(n)$
- $T(1) = \Theta(1)$

La solution est $\Theta(n^2)$.

b. Tri par insertion. Selon la version, ce pourrait aussi être une forme de tri bulle (*bubble sort*). Toutefois, ce n'est clairement pas un tri par sélection : dans ce type de tri, le gros du travail se fait, en temps linéaire, au moment de la sélection du prochain item à ajouter à ceux déjà triés, l'ajout lui-même se faisant en temps constant. Or, c'est le contraire dans le cas de l'algorithme de l'exercice : la sélection du prochain item est simple, alors que son ajout à ceux déjà triés se fait en temps linéaire.

Solution à l'exercice 2.

L'équation de récurrence est la suivante :

- $r_n = 3 \times r_{n-1}$, pour $n > 1$
- $r_1 = 2$

La solution explicite est :

- $s_n = 2 \times 3^{n-1}$, pour $n \geq 1$

Preuve :

- Cas de base : pour $n = 1$, $r_1 = 2 \times 3^{1-1} = 2 = s_1$
- Cas inductif: supposons que pour $n > 1$, $r_{n-1} = 2 \times 3^{n-2}$.
 $r_n = 3 \times r_{n-1} = 3 \times (2 \times 3^{n-2}) = 2 \times 3^{n-2+1} = 2 \times 3^{n-1} = s_n$

Solution à l'exercice 3.

- $a \leq 3$: $\Theta(n^2)$
- $a = 4$: $\Theta(n^2 \lg n)$
- $a \geq 5$: $\Theta(n^{\lg a})$

Solution à l'exercice 4.

Dans le théorème général, on a $a = 4, b = 2$.

- $k < 2$: $\Theta(n^2)$
- $k = 2$: $\Theta(n^2 \lg n)$
- $k > 2$: $\Theta(n^k)$

Solution à l'exercice 5.

Comme on ne désire que trouver une borne inférieure, les équations de récurrence suivantes font l'affaire :

- $T(1) = 1$
- $T(n) \geq 3T(n-2)$

Par substitution, en supposant $n = 2k$, on trouve $T(n) \in \Omega(3^k) = \Omega(3^{\frac{n}{2}}) = \Omega((3^{\frac{1}{2}})^n) = \Omega(\sqrt{3}^n)$.

Exercices tirés du manuel.

Exercices de l'annexe B (pp. 496–501)

- 1. (a), (b) et (d) : solutions omises
- 20. (a), (b) et (d) : solutions omises
- 24.
 - a. $\Theta(n^3)$
 - b. $\Theta(n^{\log_3 40})$
 - c. $\Theta(n^4 \lg n)$
- 25.
 - a. $\Theta(n^{\log_5 14})$
 - b. $\Theta(n^2)$